ƯCLN và BCNN

I. Ước chung lớn nhất (ƯCLN)

1. Định nghĩa

- $a_1, a_2, a_3, \ldots$ là các số nguyên không đồng thời bằng 0
- Số nguyên d được gọi là ước chung của các a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ khi và chỉ khi d là ước của mỗi a_i $(d \mid a_i)$
- Ước chung d của các a_i $(i = 1, 2, \ldots)$ được gọi là ƯCLN của các a_i nếu và chỉ nếu d là bội của mọi ước chung của các a_i
- Ký hiệu: $d = (a_1; a_2; \ldots; a_n)$
- Quy ước: ƯCLN là một số nguyên dương

Ví dụ: $(18; 24; -30) = 6$

$(13; 34; 8) = 1$

2. Bổ đề Bézout

- Cho hai số nguyên a, b không đồng thời bằng 0. Khi đó tồn tại các số nguyên x, y sao cho: $(a, b) = ax + by$ → Tổ hợp tuyến tính
- Nhận xét:

+ $(a, b) = (|a|, |b|)$

+ $(a, b) = (b, a)$ → ƯCLN có tính giao hoán

+ $(a, b, c) = ((a, b), c) = (a, (b, c))$ → ƯCLN có tính kết hợp

+ $(a, b) = d$ thì $\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ → nguyên tố cùng nhau

3. Số nguyên tố cùng nhau và số nguyên tố sánh đôi

- Số nguyên tố cùng nhau: ƯCLN của các a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ bằng 1 thì các a_i được gọi là nguyên tố cùng nhau, có thể hiểu nôm na "không chung ước".
- Số nguyên tố sánh đôi: Hai số bất kì trong các số $a_1, a_2, \ldots, a_n$ là nguyên tố cùng nhau, thì các số $a_1, a_2, \ldots a_n$ được gọi là nguyên tố sánh đôi

→ Nếu $a_1, a_2, \ldots$ là nguyên tố sánh đôi thì $a_1, a_2, \ldots$ là nguyên tố cùng nhau

Ví dụ: $(2; 5; 12; 15) = 1$ → nguyên tố cùng nhau

$(4; 21; 19; 11) = 1$ → nguyên tố sánh đôi

*** LƯU Ý:** Số nguyên tố cùng nhau không có nghĩa chúng là số nguyên tố

4. Các tính chất của UCLN

1. Nếu $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$ thì tồn tại các số nguyên $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = d$$

2. Nếu m là số nguyên dương thì:

$$(ma_1, ma_2, \dots, ma_n) = m(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

3. Nếu $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, $d > 0$ thì:

$$\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots \frac{a_n}{d}\right) = \frac{(a_1, a_2, \dots, a_n)}{d}$$

4. Nếu $(a_1, a_2, \dots, a_n) = d$, $d > 0$ thì d là UCLN khi và chỉ khi:

$$\left(\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots \frac{a_n}{d}\right) = 1$$

5. Nếu $b > 0$ là ước của a thì $(a, b) = b$

6. $(0, a) = (a, 0) = (a, 0, 0, \dots) = |a|$

7. Nếu $c \mid ab$ và $(a, c) = 1$ thì $c \mid b$

8. Nếu $b \mid a$ và $c \mid a$ và $(b, c) = 1$ thì $bc \mid a$

9. Nếu $(a, b) = 1$ thì $(ac, b) = (c, b)$

10. Nếu $(a, b) = (a, c) = 1$ thì $(a, bc) = 1$

Không chung ước
↓
Ko ảnh hưởng tính chia hết
↓
Yếu tố còn lại quyết định chia hết

5. Thuật toán Euclid tìm UCLN

- Định lý: $\begin{cases} a, b \in \mathbb{N}^* \\ a = bq + r \text{ với } 0 \le r < |b| \end{cases} \Rightarrow (a, b) = (b, r)$

- Thuật toán: $\begin{cases} (a, b) = b, & \text{nếu } b \mid a \\ (a, b) = (b, r) & \text{nếu } b \nmid a \end{cases}$

```
int euclid(int a, int b) {
    if (b == 0) return a;
    return euclid(b, a % b);
}
```

ví dụ: $(51, 45) = (45, 6) = (6; 3) = 3$

II. Bội chung nhỏ nhất (BCNN)

1. Định nghĩa

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên khác 0

- số nguyên M được gọi là bội chung của các a_i $(i = 1, 2, \dots)$ khi và chỉ khi M là bội của mỗi a_i

- Bội chung M của các a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ được gọi là BCNN của các a_i nếu và chỉ nếu M là ước của mọi bội chung của các a_i

- Ký hiệu : $M = [a_1, a_2, \dots, a_n]$
- Quy ước : BCNN là một số nguyên dương

ví dụ : $[2, 3, 4] = 12$

$[7, 3, 5] = 105$

2. Định lý về sự tồn tại BCNN

- Luôn luôn tồn tại BCNN của các số nguyên khác không $a_1, a_2, \dots, a_n$ cho trước
- Nhận xét :

+ $[a, b] = [|a|, |b|]$
+ $[a, b] = [b, a] \rightarrow$ BCNN có tính giao hoán
+ $[a, b, c] = [[a, b], c] = [a, [b, c]] \rightarrow$ BCNN có tính kết hợp

3. Định lý tìm BCNN

- Với hai số nguyên a và b khác 0, ta có :

$$[a, b] = \frac{|ab|}{(a, b)}$$

ví dụ : $[90, -84] = [90, 84] = \frac{|90.84|}{(90, 84)} = 1260$

4. Các tính chất của BCNN

$a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên khác 0

1. Nếu $d = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ thì

$$\left[\frac{a_1}{d}, \frac{a_2}{d}, \dots, \frac{a_n}{d}\right] = \frac{[a_1, a_2, \dots, a_n]}{d}$$

2. Nếu $a_1, a_2, \dots, a_n$ là các số nguyên tố sánh đôi thì :

$$[a_1, a_2, \dots, a_n] = a_1 a_2 \dots a_n$$

3. Nếu $k > 0$ là một số nguyên thì : $[ka_1, ka_2, \dots, ka_n] = k[a_1, a_2, \dots a_n]$
4. Nếu số nguyên $M > 0$ là bội chung $a_1, a_2, \dots, a_n$ thì :

$M = [a_1, a_2, \dots, a_n]$ khi và chỉ khi $\left(\frac{M}{a_1}, \frac{M}{a_2}, \dots, \frac{M}{a_n}\right) = 1$